

## 专题 01 二次根式 压轴题

### 题型归纳

题型一：求值问题

题型二：二次根式非负性的应用

题型三：配方法在二次根式的应用、双重二次根式

题型四：分母有理化的应用

题型五：最值问题

题型六：换元法、整体思想

题型七：规律题

题型八：二次根式的几何应用

题型九：新定义题

题型十：其他问题

### 题型专练

题型一：求值问题

1. 已知  $x = \frac{1}{\sqrt{2024} - \sqrt{2023}}$ ，则  $x^6 - 2\sqrt{2023}x^5 - x^4 + x^3 - 2\sqrt{2024}x^2 + 2x - \sqrt{2024}$  的值为 ( )  
A. 0                      B. 1                      C.  $\sqrt{2023}$                       D.  $\sqrt{2024}$
2. 已知  $x, y$  满足： $1 < x < y < 100$ ，且  $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{2009x} - \sqrt{2009y} + \sqrt{2009xy} = 2009$ ，则  $\sqrt{xy} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 已知实数  $x, y$  满足  $(x - \sqrt{x^2 - 2008})(y - \sqrt{y^2 - 2008}) = 2008$ ，则  $3x^2 - 2y^2 + 3x - 3y - 2007$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题型二：二次根式非负性的应用

4. 若  $m$  满足关系式  $\sqrt{3x+5y-2-m} + \sqrt{2x+3y-m} = \sqrt{1-x-y} \cdot \sqrt{x-1+y}$ ，则  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 已知  $m, x, y$  是两两不相等的实数，且满足  $\sqrt{m(x-m)} + \sqrt{m(y-m)} = \sqrt{x-m} - \sqrt{m-y}$ ，则  $\frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + 5y^2}$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 设等式  $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{a(y-a)} = \sqrt{x-a} - \sqrt{a-y}$  在实数范围内成立，其中  $a$ 、 $x$ 、 $y$  是两两不同的实数，则

$\frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$  的值是( )

- A. 3                      B.  $\frac{1}{3}$                       C. 2                      D.  $\frac{5}{3}$

### 题型三：配方法在二次根式的应用、双重二次根式

7. 先阅读下列的解答过程，然后再解答：

形如  $\sqrt{m \pm 2\sqrt{n}}$  的化简，只要我们找到两个正数  $a$ 、 $b$ ，使  $a+b=m$ ， $ab=n$ ，使得  $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = m$ ，

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{n}$ ，那么便有： $\sqrt{m \pm 2\sqrt{n}} = \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  ( $a > b$ )

例如：化简  $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

解：首先把  $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$  化为  $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ ，这里  $m=7$ ， $n=12$ ，由于  $4+3=7$ ， $4 \times 3=12$

即  $(\sqrt{4})^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$ ， $\sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{12}$

$\therefore \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{4} + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$

(1) 填空： $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 化简： $\sqrt{19-4\sqrt{15}}$ 。

8. 阅读材料：小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如

$3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$ ，善于思考的小明进行了以下探索：

若设  $a+b\sqrt{2} = (m+n\sqrt{2})^2 = m^2 + 2n^2 + 2mn\sqrt{2}$  (其中  $a$ 、 $b$ 、 $m$ 、 $n$  均为整数)，则有  $a = m^2 + 2n^2$ ， $b = 2mn$ 。

这样小明就找到了一种把类似  $a+b\sqrt{2}$  的式子化为平方式的方法，请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

(1) 若  $a+b\sqrt{7} = (m+n\sqrt{7})^2$ ，当  $a$ 、 $b$ 、 $m$ 、 $n$  均为整数时，用含  $m$ 、 $n$  的式子分别表示  $a$ 、 $b$ ，得： $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 若  $a+6\sqrt{3} = (m+n\sqrt{3})^2$ ，且  $a$ 、 $m$ 、 $n$  均为正整数，求  $a$  的值；

(3) 化简： $\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ 。

9. 材料：如何将双重二次根式  $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \pm 2\sqrt{b} > 0$ ) 化简呢？如能找到两个数  $m$ ,  $n$  ( $m > 0$ ,  $n > 0$ )，使得  $(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 = a$ ，即  $m + n = a$ ，且使  $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{b}$ ，即  $m \cdot n = b$ ，那么  $a \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{m})^2 + (\sqrt{n})^2 \pm 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$ ， $\therefore \sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = |\sqrt{m} \pm \sqrt{n}|$ ，双重二次根式得以化简。

例如化简： $\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$ ，

因为  $3 = 1 + 2$  且  $2 = 1 \times 2$ ，

$$\therefore 3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 \pm 2\sqrt{1} \times \sqrt{2}，$$

$$\therefore \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = |1 \pm \sqrt{2}|$$

由此对于任意一个二次根式只要可以将其化成  $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$  的形式，且能找到  $m$ ,  $n$  ( $m > 0$ ,  $n > 0$ )，使得  $m + n = a$ ，且  $m \cdot n = b$ ，那么这个双重二次根式一定可以化简为一个二次根式。

请同学们通过阅读上述材料，完成下列问题：

(1) 填空： $\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sqrt{12 \pm 2\sqrt{35}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 化简： $\sqrt{9 \pm 6\sqrt{2}}$ ；

(3) 计算： $\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ 。

#### 题型四：分母有理化的应用

10. 已知  $a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ ，求  $2a^2 - 8a + 1$  的值。小明是这样分析与解答的：

$$\therefore a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}，$$

$$\therefore a - 2 = -\sqrt{3}，$$

$$\therefore (a - 2)^2 = 3，即 a^2 - 4a + 4 = 3，$$

$$\therefore a^2 - 4a = -1，$$

$$\therefore 2a^2 - 8a + 1 = 2(a^2 - 4a) + 1 = 2 \times (-1) + 1 = -1。$$

请你根据小明的分析过程，解决如下问题：

(1) 若  $a = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ ，求  $3a^2 - 12a - 1$  的值；

(2) 计算： $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 比较  $\sqrt{2023} - \sqrt{2022}$  与  $\sqrt{2022} - \sqrt{2021}$  的大小，并说明理由。

11. 阅读下列材料，然后回答问题：

在进行二次根式运算时，我们有时会碰上如  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ 、 $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$  这样的式子，其实我们还可以将其进一步化简

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5}{3} \sqrt{3} ;$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2 \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1} = \sqrt{3}-1 .$$

以上这种化简过程叫做分母有理化。

$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$  还可以用以下方法化简：

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3})^2-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1 .$$

(1) 请任用其中一种方法化简：

①  $\frac{4}{\sqrt{15}-\sqrt{11}}$  ；

②  $\frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$  ( $n$  为正整数) ；

(2) 化简： $\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{101}+\sqrt{99}}$  。

12. 阅读下列材料，并回答问题。；

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1} = \sqrt{2}-1 ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2} ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4})^2-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4}-\sqrt{3} ;$$

...

(1) 填空： $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} =$ \_\_\_\_\_；比较大小： $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ \_\_\_\_\_ $\sqrt{11} - \sqrt{10}$ ；（填“<”或“>”）

(2) 观察上述算式，仿照上述方法计算  $\frac{1}{\sqrt{n} + 1 + \sqrt{n}}$ （ $n$  是正整数）；

(3) 计算： $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}$ （提示： $45^2 = 2025$ ）。

13. 阅读材料：黑白双雄，纵横江湖；双剑合璧，天下无敌。这是武侠小说中的常见描述，其意是指两个人合在一起，取长补短，威力无比，在二次根式中也有这种相辅相成的“对子”，如 $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)=-4$ ， $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$ ，它们的积不含根号，我们说这两个二次根式互为有理化因式，其中一个是另一个

的有理化因式，于是，二次根式除法可以这样解：如 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 7+4\sqrt{3}$ 。像这样通过分子、分母同乘以一个式子把分母中的根号化去或把根号

中的分母化去，叫分母有理化。

解决问题：

(1) 比较大小： $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$ \_\_\_\_\_ $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ （用“>”“<”或“=”填空）；

(2) 计算： $\frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}}$ ；

(3) 设实数  $x, y$  满足  $(x + \sqrt{x^2 + 2023})(y + \sqrt{y^2 + 2023}) = 2023$ ，求  $x + y + 2023$  的值。

### 题型五：最值问题

14. 阅读下面材料：

我们在学习二次根式时，熟悉的是分母有理化以及应用，其实，还有一个方法叫做“分子有理化”，与分母有理化类似，分母和分子都乘以分子的有理化因式，从而消掉分子中的根式比如：

$\sqrt{7} - \sqrt{6} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$ ，分子有理化可以用来比较某些二次根式的大小，也可以用来处

理一些二次根式的最值问题。例如：比较 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ 和 $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ 的大小可以先将它们分子有理化如下：

$\sqrt{7}-\sqrt{6}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ ， $\sqrt{6}-\sqrt{5}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ ，因为 $\sqrt{7}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{5}$ ，所以 $\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$ 。再例如：

求  $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$  的最大值。做法如下：解：由  $x+2\geq 0$ ， $x-2\geq 0$  可知  $x\geq 2$ ，而

$y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ ，当  $x=2$  时，分母  $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$  有最小值 2，所以  $y$  的最大值是 2。

解决下述问题：

(1)由材料可知， $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ；

(2)比较  $3\sqrt{2}-4$  和  $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$  的大小；

(3)式子  $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$  的最小值是\_\_\_\_\_。

15. 阅读材料：

已知  $a, b$  为非负实数， $\because a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$ ，

$\therefore a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ，当且仅当“ $a=b$ ”时，等号成立。

这个结论就是著名的“均值不等式”，“均值不等式”在一类最值问题中有着广泛的应用。

例：已知  $x>0$ ，求代数式  $x+\frac{4}{x}$  最小值。

解：令  $a=x$ ， $b=\frac{4}{x}$ ，则由  $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ，得  $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$ 。

当且仅当  $x=\frac{4}{x}$ ，即  $x=2$  时，代数式取到最小值，最小值为 4。

根据以上材料解答下列问题：

(1)已知  $x>0$ ，则当  $x=$ \_\_\_\_\_时，代数式  $x+\frac{3}{x}$  到最小值，最小值为\_\_\_\_\_；

(2)用篱笆围一个面积为  $100\text{m}^2$  的长方形花园，则当这个长方形花园的长、宽各为多少时，所用的篱笆最短？最短的篱笆的长度是多少米？

(3)已知  $x>0$ ，则自变量  $x$  取何值时，代数式  $\frac{x}{x^2-2x+9}$  取到最大值？最大值为多少？

(4)若  $x$  为任意实数，代数式  $\frac{x}{x^2+4x+5}$  的值为  $m$ ，则  $m$  范围为\_\_\_\_\_。

### 16. 【发现问题】

由  $(a-b)^2 \geq 0$  得,  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ; 如果两个正数  $a, b$ , 即  $a > 0, b > 0$ , 则下面的不等式:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , 当且仅当  $a = b$  时取到等号.

### 【提出问题】

若  $a > 0, b > 0$ , 利用配方法能否求出  $a + b$  的最小值呢?

### 【分析问题】

例如: 已知  $x > 0$ , 求式子  $x + \frac{4}{x}$  的最小值.

解: 令  $a = x, b = \frac{4}{x}$ , 则由  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , 得  $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ , 当且仅当  $x = \frac{4}{x}$  时, 即  $x = 2$  时, 式子有最小值, 最小值为 4.

### 【解决问题】

请根据上面材料回答下列问题:

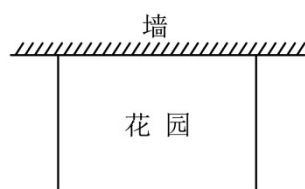
(1)  $2 + 3$  \_\_\_\_\_  $2\sqrt{2 \times 3}$ ;  $6 + 6$  \_\_\_\_\_  $2\sqrt{6 \times 6}$ . (用“=”“>”“<”填空)

(2) 当  $x > 0$ , 式子  $x + \frac{1}{x}$  的最小值为\_\_\_\_\_;

### 【能力提升】

(3) 当  $x < 0$ , 则当  $x =$  \_\_\_\_\_ 时, 式子  $4x + \frac{36}{x}$  取到最大值;

(4) 用篱笆围一个面积为 32 平方米的长方形花园, 使这个长方形花园的一边靠墙 (墙长 20 米), 问这个长方形的长、宽各为多少时, 所用的篱笆最短, 最短的篱笆是多少?



17. 阅读下面材料并解决有关问题:

(一) 由于  $(a-b)^2 \geq 0$ , 所以  $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ , 即  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , 并且当  $a = b$  时,  $a^2 + b^2 = 2ab$ ; 对于两个非负实数  $a, b$ , 由于  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ , 所以  $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$ , 即  $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ , 所以  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ,

并且当  $a=b$  时,  $a+b=2\sqrt{ab}$  ;

(二) 分式和分数有着很多的相似点, 如类比分数的基本性质, 我们得到了分式的基本性质. 小学里, 把分子比分母小的数叫做真分数, 类似的, 我们把分子的次数小于分母的次数的分式称为真分式, 反之, 称为假分式. 对于任何一个假分式都可以化成整式与真分式的和的形式, 如:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1};$$

(1) 在①  $\frac{2x+3}{x+1}$ 、②  $\frac{x^2+1}{x}$ 、③  $\frac{x}{x^2+1}$ 、④  $\frac{x^4+1}{x^2}$  这些分式中, 属于假分式的是\_\_\_\_\_ (填序号);

(2) 已知:  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ , 求代数式  $\frac{x^2}{x^4+1}$  的值;

(3) 当  $x$  为何值时,  $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$  有最小值? 并求出最小值. (写出解答过程)

18. 若三个实数  $x, y, z$  满足  $xyz \neq 0$ , 且  $x+y+z=0$ , 则有:  $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right|$  (结论不需要证明)

例如:  $\sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}} = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(-5)^2}} = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{(-5)} \right| = \frac{19}{30}$

根据以上阅读, 请解决下列问题:

### 【基础训练】

(1) 求  $\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}$  的值;

### 【能力提升】

(2) 设  $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}}$ , 求  $S$  的整数部分.

### 【拓展升华】

(3) 已知  $x+y+z=0 (xyz \neq 0, x > 0)$ , 其中, 且  $y+z=3yz$ . 当  $\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} + \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right|$  取得最小值时, 求  $x$  的取值范围.

### 题型六：换元法、整体思想

19. 阅读下列材料, 然后回答问题.

①在进行二次根式的化简与运算时，我们有时会碰上如  $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$  一样的式子，其实我们还可以将其进一步化

简：
$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}-1$$
 以上这种化简的步骤叫做分母有理化。

②学习数学，最重要的是学习数学思想，其中一种数学思想叫做换元的思想，它可以简化我们的计算，比如我们熟悉的下面这个题：已知  $a+b=2$ ， $ab=-3$ ，求  $a^2+b^2$ 。我们可以把  $a+b$  和  $ab$  看成是一个整体，令  $x=a+b$ ， $y=ab$ ，则  $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=x^2-2y=4+6=10$ 。这样，我们不用求出  $a$ ， $b$ ，就可以得到最后的结果。

(1) 计算：
$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2017}};$$

(2)  $m$  是正整数， $a = \frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}$ ， $b = \frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}$  且  $2a^2+1823ab+2b^2=2019$ 。求  $m$ 。

(3) 已知  $\sqrt{15+x^2}-\sqrt{26-x^2}=1$ ，求  $\sqrt{15+x^2}+\sqrt{26-x^2}$  的值。

20. 阅读下列材料，然后回答问题。

学习数学，最重要的是学习数学思想，其心一种数学思想叫做换元的思想，它可以简化我们的计算，比如我们熟悉的下面这个题：已知  $a+b=2$ ， $ab=-3$ ，求  $a^2+b^2$ 。我们可以把  $a+b$  和  $ab$  看成是一个整体，令  $x=a+b$ ， $y=ab$ ，则  $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=x^2-2y=4+6=10$ 。这样，我们不用求出  $a$ ， $b$ ，就可以得到最后的结果。

(1) 计算：
$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$$

(2)  $m$  是正整数， $a = \frac{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}$ ， $b = \frac{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}$ ，且  $2a^2+1955ab+2b^2=2023$ ，求  $m$ 。

(3) 已知  $\sqrt{15+x^2}-\sqrt{19-x^2}=2$ ，求  $\sqrt{15+x^2}+\sqrt{19-x^2}$  的值。

### 题型七：规律题

21.  $a_1=1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}$ ， $a_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ ， $a_3=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$ ，……， $a_n=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$ ，其中  $n$  为正整数，则

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\dots+\sqrt{a_{2020}}$  的值是\_\_\_\_\_。

22. 观察下列等式：

第 1 个等式：  $a_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ ，

第 2 个等式：  $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，

第 3 个等式：  $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$ ，

第 4 个等式：  $a_4 = \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$ ，

...

按上述规律，计算  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n =$  \_\_\_\_\_。

23. [观察]请你观察下列式子的特点，并直接写出结果：

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = -;$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -;$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -;$$

.....

[发现]根据你的阅读回答下列问题：

(1) 请根据上面式子的规律填空：

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = - \left( \text{ } \right) \quad (n \text{ 为正整数}) ;$$

(2) 请证明(1)中你所发现的规律。

[应用]请直接写出下面式子的结果：

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = -.$$

24. 阅读材料，并完成下列任务：

材料一：裂项求和

小华在学习分式运算时，通过具体运算： $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ，……

发现规律： $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  ( $n$  为正整数)，并证明了此规律成立。

应用规律：快速计算  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ 。

材料二：根式化简

$$\text{例 1} \quad \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) ;$$

$$\text{例 2} \quad \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

任务一：化简。

$$(1) \text{化简：} \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}$$

$$(2) \text{猜想：} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}} = \text{_____} \quad (n \text{ 为正整数})。$$

任务二：应用

$$(3) \text{计算：} \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}} ;$$

任务三：探究

$$(4) \text{已知 } x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3 \times 5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5 \times 7}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023 \times 2025}} ,$$

比较  $x$  和  $y$  的大小，并说明理由。

### 题型八：二次根式的几何应用

25. 已知  $\triangle ABC$  三条边的长度分别是  $\sqrt{x+1}$ ， $\sqrt{(5-x)^2}$ ， $4-(\sqrt{4-x})^2$ ，记  $\triangle ABC$  的周长为  $C_{\triangle ABC}$ 。

(1) 当  $x=2$  时， $\triangle ABC$  的周长  $C_{\triangle ABC} = \text{_____}$  (请直接写出答案)。

(2) 请用含  $x$  的代数式表示  $\triangle ABC$  的周长  $C_{\triangle ABC}$  (结果要求化简)，并求出  $x$  的取值范围。如果一个三角形的

三边长分别为  $a$ ， $b$ ， $c$ ，三角形的面积为  $S$ ，则  $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ a^2 b^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ 。

若  $x$  为整数，当  $C_{\triangle ABC}$  取得最大值时，请用秦九韶公式求出  $V_{ABC}$  的面积。

26. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式，此公式与古希腊几何学家海伦提出的公式如出一辙，即三角形的三边长分别为  $a, b, c$ ，记  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，则其面积

出的公式如出一辙，即三角形的三边长分别为  $a, b, c$ ，记  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，则其面积

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。这个公式也被称为海伦-秦九韶公式。

(1) 当三角形的三边  $a=3, b=5, c=6$  时，请你利用公式计算出三角形的面积；

(2) 一个三角形的三边长依次为  $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$ ，请求出三角形的面积；

(3) 若  $p=8, a=4$ ，求此时三角形面积的最大值。

27. 请阅读下列材料，并完成相应的任务。

古希腊几何学家海伦，在数学史上以解决几何测量问题而闻名。在他的著作《度量》一书中，给出了三角形

面积的计算公式(海伦公式)：如果一个三角形的三边长分别为  $a, b, c$ ，记  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，那么三角形的面

积是  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。

印度算术家波罗摩笈多和婆什迦罗还给出了四边形面积的计算公式：如果一个四边形的四边长分别为

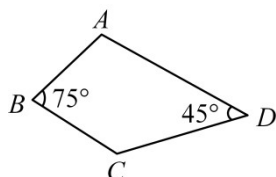
$a, b, c, d$ ，记  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ，那么四边形的面积是  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}}$  (其

中， $A$  和  $C$  表示四边形的一组对角的度数)

根据上述信息解决下列问题：

(1) 已知三角形的三边是 4, 6, 8，则这个三角形的面积是

(2) 小明的父亲是工程师，设计的某个零件的平面图是如图的四边形  $ABCD$ ，已知  $AB=8, AD=12, BC=10-\sqrt{10}, CD=10+\sqrt{10}, \angle B=75^\circ, \angle D=45^\circ$ 。求出这个零件平面图的面积。



### 题型九：新定义题

28. 对于有理数  $a, b$ ，定义  $\min\{a, b\}$  的含义为：当  $a < b$  时， $\min\{a, b\} = a$ 。例如： $\min\{1, -2\} = -2$ 。已知

$\min\{\sqrt{21}, a\} = a$  ,  $\min\{\sqrt{21}, b\} = \sqrt{21}$  , 且  $a$  和  $b$  为两个连续正整数, 则  $\sqrt{ab} - \min\{\sqrt{5}, a\}$  的值为\_\_\_\_\_.

29. 定义：我们将  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$  与  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  称为一对“对偶式”. 因为

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$  , 可以有效的去掉根号, 所以有一些问题可以通过构造“对偶式”

来解决.

例如：已知  $\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x} = 1$  , 求  $\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x}$  的值, 可以这样解答：

因为  $(\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x}) \times (\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x}) = (\sqrt{18-x})^2 - (\sqrt{11-x})^2 = 18-x-11+x=7$  ,

所以  $\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x} = 7$  .

(1)已知： $\sqrt{20-x} + \sqrt{4-x} = 8$  , 求  $\sqrt{20-x} - \sqrt{4-x}$  的值；

(2)结合已知条件和第①问的结果, 解方程： $\sqrt{20-x} + \sqrt{4-x} = 8$  ；

(3)计算： $\frac{1}{3\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{2023\sqrt{2021}+2021\sqrt{2023}}$  .

30. 在数学课上, 老师说统计学中常用的平均数不是只有算术平均数一种, 好学的小聪通过网络搜索, 又得到了两种平均数的定义, 他把三种平均数的定义整理如下：

对于两个数  $a$  ,  $b$  ,

$M = \frac{a+b}{2}$  称为  $a$  ,  $b$  这两个数的算术平均数,

$N = \sqrt{ab}$  称为  $a$  ,  $b$  这两个数的几何平均数,

$P = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$  称为  $a$  ,  $b$  这两个数的平方平均数

小聪根据上述定义, 探究了一些问题, 下面是他的探究过程, 请你补充完整：

(1)若  $a = -2$  ,  $b = -3$  , 则  $M = -\frac{5}{2}$  ;  $N =$ \_\_\_\_\_ ;  $P =$ \_\_\_\_\_ ;

(2)小聪发现当  $a$  ,  $b$  两数异号时, 在实数范围内  $N$  没有意义, 所以决定只研究当  $a$  ,  $b$  都是正数时这三种平均数的大小关系. 结合乘法公式和勾股定理的学习经验, 他选择构造几何图形, 用面积法解决问题：

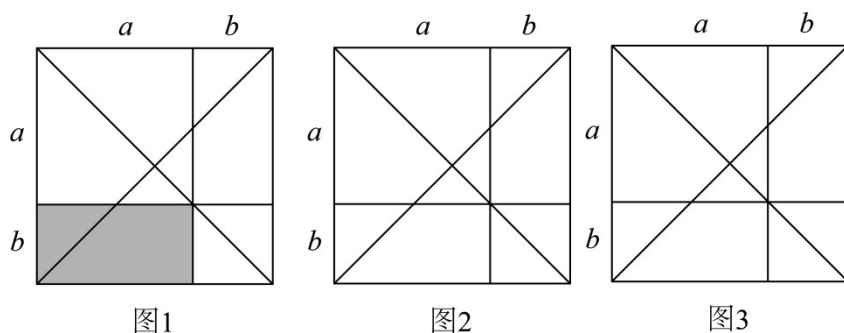


图1

图2

图3

如图，画出边长为  $a+b$  的正方形和它的两条对角线，则图 1 中阴影部分的面积可以表示  $N^2$ 。

①请你分别在图 2，图 3 中用阴影标出一面积为  $M^2$ ， $P^2$  的图形：

②借助图形可知，当  $a$ ， $b$  都是正数时， $M, N, P$  的大小关系是：\_\_\_\_\_（把  $M, N, P$  从小到大排列，并用“<”或“≤”号连接）；

③若  $a+b=5$ ，则  $P$  的最小值为\_\_\_\_\_。

### 题型十：其他问题

31. 已知  $x, y > 0, x^2 + y^2 = 24, (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 180$ . 则  $xy =$  ( )

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

32. 已知  $m$  为正整数，若  $\sqrt{189m}$  是整数，则根据  $\sqrt{189m} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 7m} = 3\sqrt{3 \times 7m}$  可知  $m$  有最小值

$3 \times 7 = 21$ . 设  $n$  为正整数，若  $\sqrt{\frac{300}{n}}$  是大于 1 的整数，则  $n$  的最小值为\_\_\_\_\_，最大值为\_\_\_\_\_， $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

的小数部分为\_\_\_\_\_。

33. 若  $a$  和  $b$  都是正整数且  $a < b$ ， $\sqrt{a}$  和  $\sqrt{b}$  是可以合并的二次根式，下列结论中正确的个数为 ( )

①只存在一组  $a$  和  $b$  使得  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{18}$ ；

②只存在两组  $a$  和  $b$  使得  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{75}$ ；

③不存在  $a$  和  $b$  使得  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{260}$ ；

④若只存在三组  $a$  和  $b$  使得  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ ，则  $\frac{c}{a}$  的值为 49 或 64

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个